

Sistemas de Primer y segundo orden

Espinoza Guerrero Pedro - Ricardo Meza Gonzales - Adrián Alejandro Esquer Carreón

Índice

Introducción

El tratamiento de datos en sistemas dinámicos lineales es un proceso fundamental que permite interpretar, analizar y optimizar la información obtenida de estos sistemas. Este tratamiento implica la recolección, limpieza, transformación y análisis de los datos obtenidos, con el objetivo de obtener una visión clara del comportamiento del sistema y de los factores que influyen en su respuesta.

Primero, la recolección de datos es el paso inicial y crucial, donde se obtiene información sobre las entradas y salidas del sistema, así como otros parámetros relevantes, como el tiempo de respuesta y los posibles errores o perturbaciones que puedan afectar su desempeño. Posteriormente, en la fase de limpieza y preprocesamiento de datos, se eliminan los valores atípicos o ruidos que puedan distorsionar el análisis, asegurando así que los datos sean representativos y confiables.

Luego, el proceso de transformación de datos se centra en convertir la información en un formato adecuado para el análisis, lo cual puede implicar normalización, escalado o descomposición en componentes más simples. Una vez transformados, los datos pueden ser analizados mediante herramientas estadísticas y técnicas de modelado matemático, lo que permite entender y predecir la respuesta del sistema a diferentes estímulos. Esta fase de análisis permite identificar patrones, tendencias y anomalías, fundamentales para la optimización del sistema.

Finalmente, el tratamiento de datos facilita la predicción del comportamiento del sistema dinámico lineal bajo diferentes condiciones y contribuye a mejorar su desempeño mediante el ajuste de sus parámetros. Además, ayuda a garantizar la estabilidad del sistema, pues permite anticipar posibles fallos o inestabilidades, y a diseñar estrategias de control que mejoren su respuesta.

En conjunto, estos procesos de tratamiento de datos son esenciales en campos de la ingeniería y automatización, ya que proporcionan las bases necesarias para implementar controles precisos y eficientes en sistemas de control, maquinaria industrial y otros procesos donde la estabilidad y el rendimiento óptimo son críticos.

Respuesta de Sistemas de primer y segundo orden

Los sistemas de primer orden son sistemas que están representados por ecuaciones diferenciales de 1° orden como su nombre lo dice, también es donde nuestro diferencial es exponente 1.

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Para saber si una ecuación diferencial es de primer orden, se debe considerar el tipo de ecuación: dy dx + p(x)y = f(x), donde las funciones p(x) y f(x) se consideran continuas. Si f(x) ≡ 0, la ecuación se dice homogénea.

Los diseños de primer orden son aquellos que se consideran para recoger datos con el propósito de ajustar un modelo de primer orden.

Los sistemas de segundo orden son raros en la práctica, sin embargo, su análisis ayuda al entendimiento del análisis y diseño de sistemas de orden más altos, los sistemas de segundo orden son aquellos que posee dos polos en su función de transferencia. Físicamente este sistema puede representar un circuito RLC paralelo, acoplamiento de dos tanques, tanque con sistema de calentamiento/enfriamiento, sistemas de masas inerciales, etc.

Genéricamente cualquier sistema dinámico lineal de segundo orden se puede representar por la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \quad = \quad bu(t)$$

Importancia de las Respuestas de Primer y Segundo Orden

Conocer las respuestas de sistemas de primer y segundo orden es crucial para diseñar y ajustar sistemas de control en la ingeniería. Permite prever cómo reaccionará el sistema ante cambios en las entradas y ajustar parámetros como la

constante de tiempo o el coeficiente de amortiguamiento para lograr la estabilidad y el rendimiento deseados.

Un sistema de 1er orden tiene una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

La respuesta de este sistema ante una entrada escalón unitario tiene por expresión:

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

La representación gráfica de esta expresión puede verse en la figura 1.

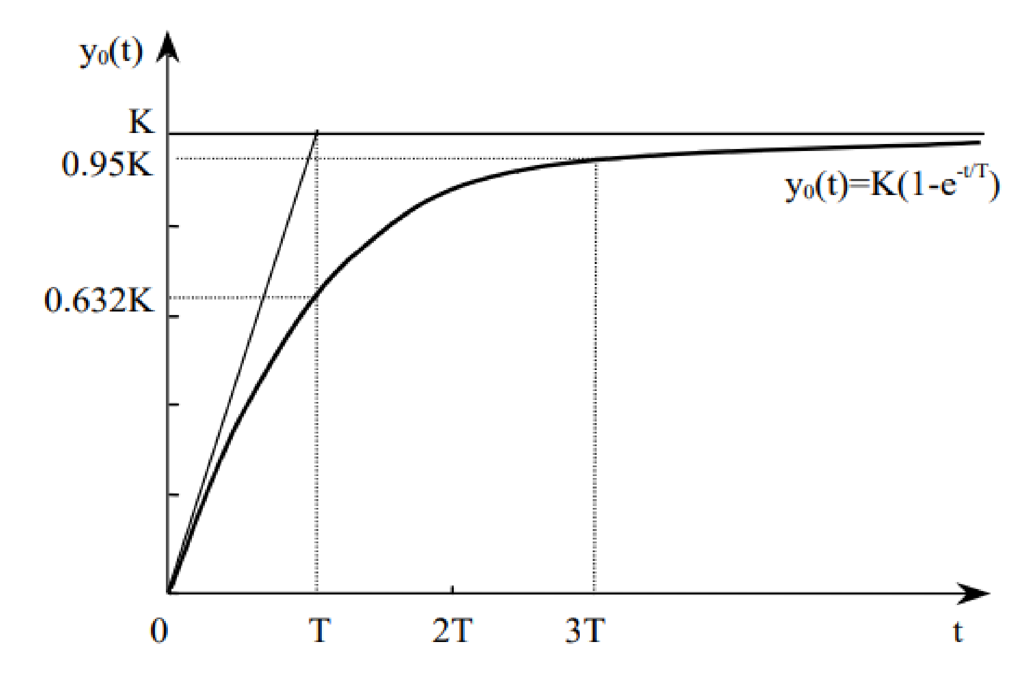


Figura 1.- Respuesta de un sistema de 1er orden ante entrada escalón unitario.

Los parámetros característicos que aparecen representados en la figura anterior son:

- K: La ganancia estática se define como el valor final ante entrada escalón unitario.
- T: Constante de tiempo (es el tiempo en el que se alcanza el 63% del valor final).
- ts= 3T: Tiempo de establecimiento (es el tiempo que tarda la respuesta en entrar y permanecer en la zona del ±5% en torno a su valor de equilibrio).

Los sistemas de 2º orden tienen una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Pudiendo considerar los siguientes parámetros:

- K: Ganancia estática.
- ω_n: Frecuencia natural no amortiguada.
- ξ: Coeficiente de amortiguamiento.

Los dos polos de este sistema pueden ser reales o complejos conjugados, dependiendo del valor que tome el coeficiente de amortiguamiento ξ.

Para el caso de tener polos complejos conjugados estos serán de la forma:

$$s = -\sigma \pm \omega_d j$$

con:

- $0 < \xi < 1$.
- $\sigma = \xi\omega_n$: Constante de amortiguamiento.
- $\omega_d = \omega_n (1 - \xi^2)^{1/2}$ = Frecuencia amortiguada.

Si σ es positivo el sistema será estable. Si ξ es mayor que la unidad, los polos serán reales y el sistema no presentará oscilaciones. Por el contrario, si ξ es menor que la unidad, los polos serán complejos y el sistema oscilará.

Estas consideraciones nos permiten clasificar los sistemas de segundo orden frente a entrada escalón de la siguiente manera:

$\xi < 0$	INESTABLE
$\xi > 1$	SOBREAMORTIGUADO
$\xi = 1$	CRITICAMENTE AMORTIGUADO
$0 < \xi < 1$	SUBAMORTIGUADO

La respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado, ante entrada escalón unitario, queda representada en la figura 2 donde aparecen una serie de parámetros característicos cuya denominación, significado y valor se dan a continuación.

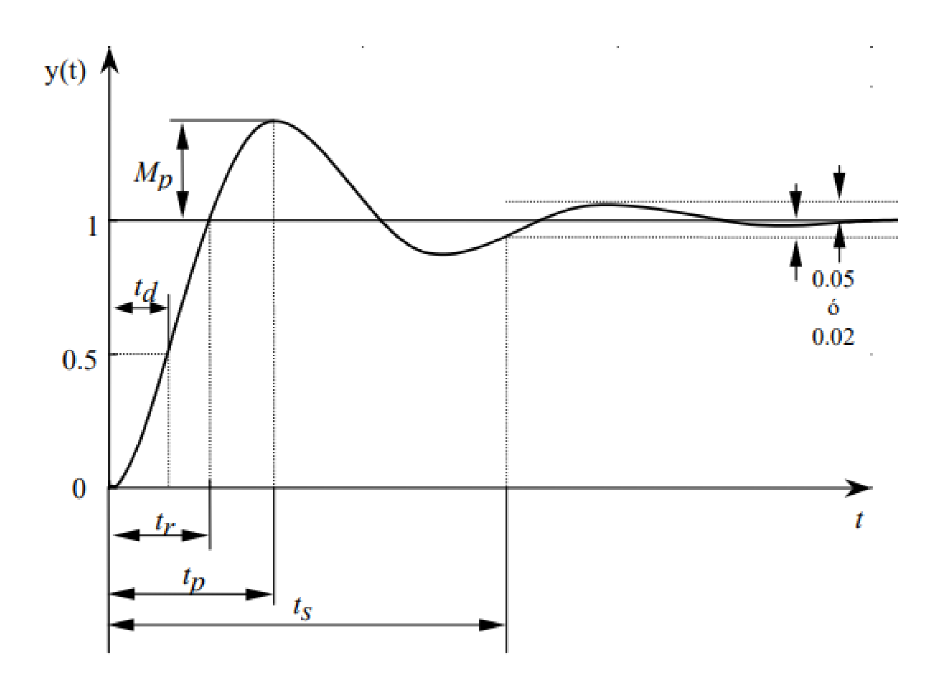


Figura 2.- Respuesta de un sistema de 2º orden ante entrada escalón unitario.

- Pendiente en el origen.

$$\dot{y}(0) = 0$$

- Tiempo de establecimiento.

$$t_s \approx \frac{\pi}{\sigma}$$

- Tiempo de subida.

$$t_r \approx \frac{\pi - \vartheta}{\omega_d} \qquad \text{con} \qquad \theta = \text{arctg}\frac{\omega_d}{\sigma}$$

- Tiempo de pico.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- Sobreoscilación.

$$M_p = e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\text{tg}\,\theta}}$$

4.1 Sistemas Continuos de Primer Orden

¿Qué son los sistemas continuos de primer orden?

Un sistema de orden continuo es un sistema que cambia de forma constante a lo largo del tiempo. El orden de un sistema se determina por el grado de su polinomio característico, que coincide con el número de polos del sistema y con el orden de la ecuación diferencial que lo modela.

Se denomina orden de un sistema al grado de su polinomio característico. Consecuentemente el orden de un sistema coincide con el número de polos de éste y con el orden de la ecuación diferencial que lo modela.

Los sistemas más sencillos y representativos son los de 1er y 2º orden. El análisis de la respuesta temporal de los sistemas se hace a partir de su respuesta a ciertas entradas, en particular al escalón unitario u(t).

La solución de la ecuación diferencial de un sistema continuo de primer orden sin entradas externas sigue una forma exponencial:

x(t)=x0e^at

Donde:

- **x0** = es el valor inicial de la variable de estado en el tiempo $t = 0$.
- **a** = determina si el sistema crece o decrece de manera exponencial en el tiempo. Si $a > 0$, la variable aumenta exponencialmente; si $a < 0$, la variable decae exponencialmente.

Si existe una entrada externa u(t), como una fuente de calor o fuerza externa, la solución será más compleja y dependerá de la naturaleza de esa entrada. En estos casos, la solución suele involucrar la respuesta natural del sistema más la respuesta forzada debido a la entrada externa.

Características de los Sistemas Continuos de Primer Orden:

- **Linealidad:** Si la ecuación diferencial es lineal (como en el ejemplo), las soluciones suelen ser sencillas y fáciles de predecir.

- **Comportamiento exponencial:** La solución de la ecuación muestra una tendencia exponencial en el tiempo. Dependiendo de a, el sistema puede crecer o decrecer rápidamente.
- **Respuesta a entradas externas:** La forma en que el sistema responde a una entrada externa dependerá de la naturaleza de la entrada. Si la entrada es constante, el sistema tiende hacia un estado estacionario.

Aplicaciones:

- **Circuitos eléctricos:** Los circuitos RC (resistor-capacitor) son un ejemplo clásico de un sistema de primer orden donde la ecuación diferencial describe la carga del capacitor en función del tiempo.
- **Física:** El modelo de movimiento de un objeto bajo fricción viscosa también es un sistema de primer orden.
- **Biología:** En farmacocinética, el proceso de eliminación de un fármaco del cuerpo puede modelarse mediante una ecuación de primer orden.

4.2 Sistemas Discretos de Primer Orden

Los sistemas discretos de primer orden son una herramienta fundamental para modelar procesos que evolucionan de manera secuencial y ocurren en intervalos específicos de tiempo. A diferencia de los sistemas continuos, estos sistemas no requieren una representación constante del tiempo, sino que describen el comportamiento en instantes discretos. Los sistemas discretos permiten modelar fenómenos en áreas como la biología, la economía, la informática y otras disciplinas donde los cambios ocurren a intervalos definidos.

Ecuación general de un sistema discreto de primer orden:

$$x[k+1] = ax[k] + bu[k]$$

Donde:

- **x[k]:** Es la variable de estado en el instante discreto k, que representa el estado actual del sistema.
- **x[k+1]:** Es el estado del sistema en el siguiente paso de tiempo.
- **a:** Es una constante que determina cómo el estado futuro depende del presente, indicando la fuerza de la retroalimentación interna.
- **u[k]:** Es una entrada externa al sistema en el instante k, y b es un coeficiente que relaciona esta entrada con el estado actual del sistema.

Solución general

La solución de un sistema discreto de primer orden tiene la forma de una secuencia exponencial discreta:

$$x[k]=x0a^k$$

Donde:

- **x0:** Es el valor inicial de la variable de estado en $k = 0$
- **a:** Determina el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo. Si $a > 1$, el sistema exhibe un crecimiento exponencial; si $0 < a < 1$, el sistema decae exponencialmente.

Si existe una entrada externa u[k], la solución del sistema dependerá de cómo esa entrada influya en el sistema a cada paso de tiempo. La respuesta forzada (causada por la entrada) y la respuesta natural (causada por la dinámica interna) interactúan para determinar el comportamiento total del sistema.

Características principales de los sistemas discretos de primer orden:

1. **Evolución secuencial:** Las variables cambian en pasos o intervalos de tiempo fijos.
2. **Predicción fácil:** Los modelos discretos permiten predecir el estado del sistema en pasos futuros a partir de su estado actual.
3. **Simplicidad:** Los sistemas de primer orden son más simples de analizar en comparación con los de mayor orden, ya que dependen solo de una variable y su estado en el paso anterior.
4. **Linealidad:** Si la ecuación es lineal, como en este caso, el comportamiento del sistema es predecible y las soluciones son fáciles de calcular.

Aplicaciones de los sistemas discretos de primer orden:

- **Economía:** Los sistemas discretos se utilizan en modelos de crecimiento económico e inversión, donde los recursos o las inversiones crecen de manera escalonada en periodos específicos (meses, trimestres o años).
- **Informática:** En el ámbito de la programación y el aprendizaje automático, los algoritmos iterativos utilizan sistemas discretos para resolver problemas complejos paso a paso. Un ejemplo típico es el ajuste de parámetros en redes neuronales mediante retroalimentación iterativa.
- **Biología:** Los sistemas discretos de primer orden se emplean para modelar procesos biológicos cíclicos, como el ciclo de vida de una población de organismos, donde el crecimiento, la reproducción y la mortalidad ocurren en intervalos fijos, como estaciones o años.
- **Ingeniería:** Los controladores de sistemas discretos, como los sistemas digitales de control automático, utilizan estos modelos para predecir y ajustar el comportamiento de sistemas físicos en intervalos de tiempo discretos.

4.3 Sistemas Continuos de Segundo Orden

Los sistemas continuos de segundo orden se describen mediante ecuaciones diferenciales de segundo grado y son fundamentales en el análisis de fenómenos como oscilaciones mecánicas, eléctricas o cualquier sistema que tenga comportamiento dinámico con almacenamiento de energía. En estos sistemas, la estabilidad y el comportamiento oscilatorio dependen de los coeficientes de la ecuación que los describe.

La ecuación general de un sistema continuo de segundo orden es:

$$d^2x(t) / dt^2 + 2\zeta\omega_n (dx(t) / dt) + \omega_n^2 x(t) = u(t)$$

Donde:

- $x(t)$ es la variable de estado que describe el sistema.
- $d^2x(t) / dt^2$ es la aceleración, o la segunda derivada de la variable de estado.
- $dx(t) / dt$ es la velocidad, o la primera derivada.
- ω_n es la **frecuencia natural** del sistema sin amortiguamiento.
- ζ es el **coeficiente de amortiguamiento**, que define el nivel de disipación de energía en el sistema.
- $u(t)$ es la entrada externa al sistema.

A partir de esta ecuación, se derivan tres regiones importantes para el análisis de sistemas de segundo orden:

4.3.1 Región de Estabilidad

La región de estabilidad determina si las oscilaciones en el sistema se amortiguan con el tiempo o si crecen sin control. Un sistema continuo de segundo orden es estable si sus oscilaciones se atenúan con el tiempo y tiende a un equilibrio estable, lo que implica que cualquier perturbación o entrada externa eventualmente desaparecerá.

Condiciones de estabilidad:

La estabilidad del sistema se basa en el coeficiente de amortiguamiento (ζ) y la frecuencia natural (ω_n):

- Para que el sistema sea estable, debe tener un amortiguamiento positivo ($\zeta > 0$) y un polinomio característico con raíces negativas.
- Región estable: Se da cuando $\zeta > 0$, que significa que el sistema es amortiguado y tiende a regresar a un estado de reposo sin que las oscilaciones crezcan indefinidamente.

4.3.2 Región de Tiempo máximo de asentamiento

El tiempo de asentamiento es el intervalo durante el cual la respuesta de un sistema permanece dentro de un margen específico alrededor de su valor final después de una perturbación. Este parámetro es crucial para evaluar la rapidez con la que un sistema alcanza su estado estable.

Sistemas de primer orden:

Para un sistema de primer orden, el tiempo de asentamiento se define como el tiempo necesario para que la respuesta se mantenga dentro del 5% de su valor final. Este tiempo está inversamente relacionado con el parámetro de tiempo del sistema, denotado como τ La relación es:

$$Ts = 4\tau$$

Donde Tses el tiempo de asentamiento y τ es el tiempo de tiempo del sistema. Esta fórmula indica que, a medida que τ disminuye, el tiempo de asentamiento se reduce, lo que implica una respuesta más rápida del sistema.

Sistemas de segundo orden:

En sistemas de segundo orden, el tiempo de asentamiento depende de dos parámetros clave: el coeficiente de amortiguamiento ξ y la frecuencia natural ωn.

Para un sistema subamortiguado (ξ < 1), el tiempo de asentamiento se aproxima a:

$$Ts \approx \frac{4}{\xi\omega n}$$

Esta expresión muestra que un mayor coeficiente de amortiguamiento o una mayor frecuencia natural resultan en un tiempo de asentamiento más corto, indicando una respuesta más rápida.

Es importante destacar que, en sistemas de segundo orden, el tiempo de asentamiento también está influenciado por la frecuencia de oscilación natural del sistema. Un aumento en la frecuencia de oscilación puede reducir el tiempo de asentamiento, pero también puede afectar la estabilidad y la calidad de la respuesta.

4.3.3 Región de Tiempo máximo de asentamiento

La frecuencia máxima de oscilación en sistemas de segundo orden se refiere a la frecuencia a la cual el sistema oscila con la mayor amplitud antes de que la respuesta transitoria se atenúe debido al amortiguamiento. Este parámetro es esencial para comprender el comportamiento oscilatorio de sistemas mecánicos, eléctricos y otros sistemas dinámicos.

Definición y Fórmula:

Para un sistema de segundo orden con una función de transferencia estándar:

$$H(s)=\frac{\omega^2{}_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Donde:

ω_n es la frecuencia natural no amortiguada.

ζ es el coeficiente de amortiguamiento.

La frecuencia máxima de oscilación (ω_{max}) se calcula como:

$$\omega_{max}=\omega n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Esta fórmula es válida para sistemas subamortiguados ($\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$), donde la respuesta presenta oscilaciones amortiguadas.

Importancia en el Análisis de Sistemas:

La frecuencia máxima de oscilación es crucial para determinar la capacidad de un sistema para oscilar antes de que el amortiguamiento reduzca significativamente la amplitud de las oscilaciones. En aplicaciones prácticas, como en el diseño de

circuitos RLC o sistemas mecánicos, conocer esta frecuencia permite ajustar parámetros para lograr el comportamiento deseado.

4.3.4 Región de sobrepico máximo

El sobrepico máximo (M_p) es un parámetro fundamental en el análisis de la respuesta transitoria de sistemas de segundo orden. Indica el valor máximo que alcanza la salida del sistema en relación con su valor final, expresado como un porcentaje del valor final.

Definición y Fórmula:

Para un sistema de segundo orden con una función de transferencia estándar:

$$H(s)=\frac{\omega^2{}_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Donde:

ω_n es la frecuencia natural no amortiguada.

ζ es el coeficiente de amortiguamiento.

El sobrepico máximo se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$M_p=e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-2\zeta^2}}}$$

Esta expresión es válida para sistemas subamortiguados ($\zeta < 1$) donde la respuesta presenta oscilaciones amortiguadas.

Importancia en el Análisis de Sistemas:

El sobrepico máximo proporciona una medida de la estabilidad relativa del sistema. Un valor de M_p pequeño indica que el sistema alcanza rápidamente su valor final sin excederlo significativamente, lo que es deseable en aplicaciones donde se requiere una respuesta rápida y controlada. Por el contrario, un M_p grande sugiere que el sistema oscila más antes de estabilizarse, lo que puede ser indeseable en ciertos contextos.

4.4 Sistemas Discretos de Segundo Orden

Sistema de segundo orden: es aquel que posee dos polos en su función de transferencia. Físicamente este sistema puede representar un circuito RLC paralelo, acoplamiento de dos tanques, tanque con sistema de calentamiento/enfriamiento, sistemas de masas inerciales, etc.

La forma estándar de la función de transferencia de un sistema de 2doorden es:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

$$k: ganancia\ estática$$

$$\omega_n: frecuencia\ natural\ no\ amortiguada$$

$$\zeta: coeficiente\ de\ amortiguamiento$$

La ganancia estática ***k*** , el coeficiente de amortiguamiento ***ζ***, y la frecuencia natural ***ω**n,* ***son los parámetros de un sistema de segundo orden.*** En comparación con la simplicidad de un sistema de primer orden (Sistemas de primer orden), un sistema de segundo orden exhibe una amplia gama de respuestas que deben analizarse y describirse. Mientras que variar el parámetro de un sistema de primer orden *(constante de tiempo)* simplemente cambia la velocidad de la respuesta, los cambios en los parámetros de un sistema de segundo orden pueden cambiar la forma total de la respuesta.

El diagrama de bloques de la Figura 1 representa a un sistema de segundo orden de tipo cero. Físicamente, este diagrama puede ser el modelo de un motor DC, el modelo de una red eléctrica o de un mecanismo con resorte, amortiguador y masa. Por ello, el sistema de segundo orden es de gran interés académico, industrial y tecnológico, de los más importantes para el estudio.

$$R_{(s)} \rightarrow \boxed{\dfrac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \rightarrow C_{(s)}$$

Figura 1.

Los sistemas de segundo orden son esenciales en el diseño de sistemas de control. En consecuencia, es de gran utilidad entender que el modelo de la Figura 1 suele provenir de un sistema realimentado como el de la Figura 2:

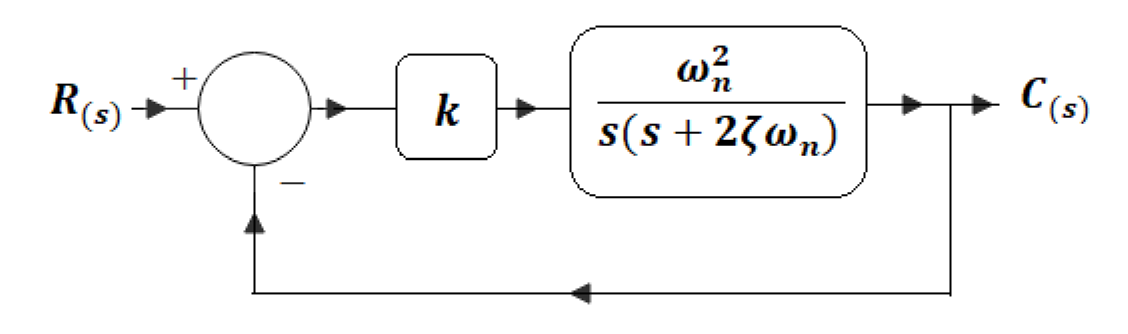


Figura 2.

El sistema de la Figura 2 se puede ver como un sistema de control básico. Una planta de segundo orden de tipo 1, con un polo en **$s=-2\zeta\omega_n$**, en serie con un controlador proporcional, y realimentación unitaria. Para diseñar un sistema de control, por excelencia se utiliza principalmente la ***entrada escalón unitario*** como señal de prueba. Es así porque a partir de ella, derivando podemos hallar la respuesta al impulso unitario, e integrando, la respuesta a la rampa unitaria. El comportamiento del sistema de control ante una entrada escalón unitario depende de estos tres factores: la ganancia ***k***, el coeficiente de amortiguamiento ζ, y la frecuencia natural ω_n. Con solo conocer el valor del coeficiente de amortiguamiento ζ, podemos determinar la forma de la respuesta del sistema. Por otra parte, en ocasiones podremos cumplir con los requerimientos de diseño de un sistema de control con sólo variar el valor de la ganancia ***k.***

Un sistema discreto de segundo orden es un sistema dinámico cuyo comportamiento puede ser descrito por una ecuación en diferencias de segundo orden. Esto significa que la salida del sistema en un instante de tiempo particular depende de las entradas en ese instante y en los dos instantes de tiempo inmediatamente anteriores.

El modelo más común para representar un sistema discreto de segundo orden es una ecuación en diferencias, que relaciona la salida del sistema en el tiempo discreto con sus valores pasados. La ecuación general tiene la forma:

y[n]+a1y[n−1]+a2y[n−2]=b0u[n]+b1u[n−1]+b2u[n−2]

Donde:

- y[n]: es la salida del sistema en el instante de tiempo n.
- u[n]: es la entrada del sistema en el instante de tiempo n.
- a1 y a2: son coeficientes que determinan la influencia de las salidas pasadas.
- b0, b1 y b2: son coeficientes que determinan la influencia de las entradas actuales y pasadas.

Función de Transferencia Discreta

En el dominio discreto, la ecuación diferencial puede transformarse utilizando la transformada Z, lo que permite obtener una función de transferencia que representa el sistema. La función de transferencia de un sistema discreto de segundo orden tiene la forma:

$$H\ (\ z\ ) = \frac{Y\ (\ z\ )}{Tu\ (\ z\ )} = \frac{b_0 + b_1 el^{-1} + b_2 el^{-2}}{1 + a_1 el^{-1} + a_2 el^{-2}}$$

Dónde:

- H(z): es la función de transferencia del sistema.
- el−1: representa un retraso en un paso de tiempo discreto.

- Los coeficientes ai y bi determina la dinámica del sistema.

Un sistema discreto de segundo orden puede representarse mediante un **diagrama de bloques**, que muestra las relaciones entre la entrada, la salida y los retardos discretos. En este diagrama, cada retrasoel−1 se muestra como un bloque que guarda el valor de la señal en el paso de tiempo anterior. La estructura típica incluye:

- Un **bloque de entrada** para la señal tu [n].
- **Bloques de retardos** para los términos y [n – 1] y y[n – 2].
- **Sumadores** para combinar las señales ponderadas por los coeficientes ai y bi.
- Un **bloque de salida** para la señal resultante y [n].

Características del sistema

En los sistemas discretos de segundo orden, las características principales como la estabilidad, el tiempo de asentamiento, la frecuencia de oscilación y el sobrepico se determinan a partir de la posición de los polos en el plano Z. Dependiendo de la ubicación de los polos (dentro del círculo unitario), se puede predecir cómo el sistema responderá a las entradas discretas.

4.4.1 Región de Estabilidad

El concepto de **estabilidad** ha sido ampliamente utilizado en relación con el comportamiento de los sistemas frente a una perturbación externa. No obstante, y desde el punto de vista de la comprensión de los fenómenos físicos y químicos y su expresión matemática, el grado de complejidad de las ecuaciones resultantes y de su resolución suelen hacer difícil entender lo que realmente ocurre. Una vez más podemos decir que los modelos resultantes de aplicar conceptos de dinámica de sistemas pueden ayudar notablemente en la visualización del fenómeno en análisis.

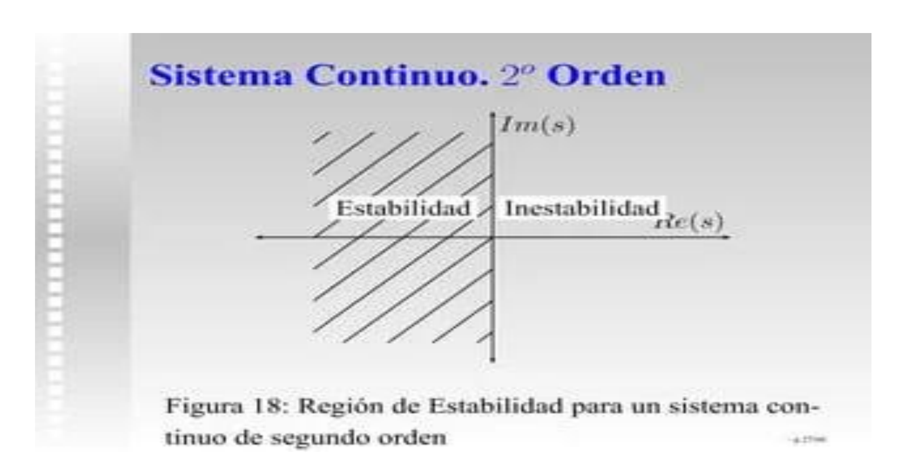
Un sistema es estable cuando, ante una perturbación limitada, su respuesta vuelve a un estado de equilibrio en un tiempo finito. Si la respuesta crece sin límite, el

sistema se considera inestable. En términos de sistemas dinámicos, la estabilidad implica que todas las raíces del polinomio característico del sistema tienen partes reales negativas (en el plano complejo), lo que asegura que la respuesta del sistema no diverja con el tiempo.

Para un sistema de segundo orden, la estabilidad está determinada principalmente por los **polos del sistema** (raíces del polinomio característico). Para un sistema estable, estos polos deben tener sus partes reales negativas, lo que garantiza que la respuesta converja a un punto de equilibrio. En el plano complejo, los polos deben estar situados en el semiplano izquierdo para que el sistema se considere estable.

Además, la estabilidad también está relacionada con la **amortiguación del sistema** (factor de amortiguamiento ζ). Dependiendo del valor de este factor:

- Si $\zeta > 1$ (sobreamortiguado), el sistema es estable, pero responde lentamente.
- Si $\zeta = 1$ (críticamente amortiguado), el sistema es estable y tiene una respuesta rápida sin oscilaciones.
- Si $0 < \zeta < 1$(subamortiguado), el sistema es estable, pero presenta oscilaciones.
- Si $\zeta \leq 0$, el sistema es inestable.



<u>La región de estabilidad de un sistema de segundo orden</u> es una zona en el plano complejo de los polos (o raíces características) de la función de transferencia

del sistema, donde todas las respuestas del sistema a cualquier entrada acotada son también acotadas. En otras palabras, es el conjunto de valores de los parámetros del sistema que garantizan que este no se vuelva inestable.

La región de estabilidad de un sistema de segundo orden se determina analizando la ubicación de los polos en el plano complejo. Para sistemas de segundo orden, la región de estabilidad generalmente se encuentra en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Criterios de estabilidad:

- **Criterio de Routh-Hurwitz:** Este criterio algebraico permite determinar la estabilidad de un sistema a partir de los coeficientes del polinomio característico.
- **Lugar de las raíces:** Este método gráfico permite visualizar cómo cambian los polos de un sistema al variar un parámetro de ganancia y determinar la región de estabilidad.
- **Criterio de Nyquist:** Este criterio se utiliza para analizar la estabilidad de sistemas de lazo cerrado y relaciona la función de transferencia de lazo abierto con la estabilidad del sistema.

En los sistemas discretos, la región de estabilidad se define en función de la ubicación de los polos del sistema en el plano Z (plano complejo en la representación discreta). Para que un sistema discreto de segundo orden sea estable, sus polos deben estar ubicados dentro del círculo unitario en el plano Z (es decir, la magnitud de los polos debe ser menor que 1).

Esto es diferente a los sistemas continuos, donde la estabilidad depende de la posición de los polos en el semiplano izquierdo del plano complejo.

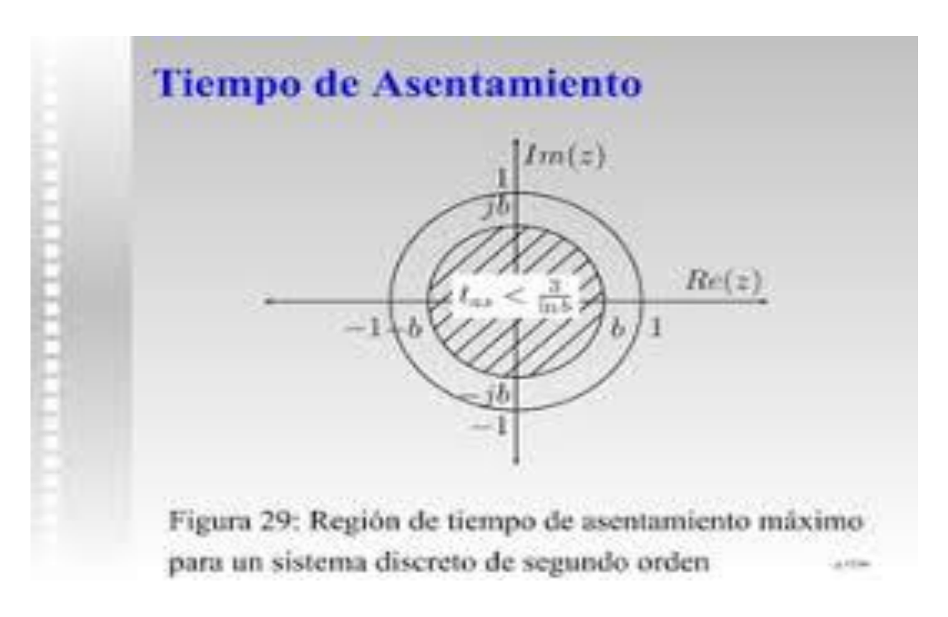
En el caso de los sistemas discretos:

- Si los polos están dentro del círculo unitario (magnitud < 1), el sistema es estable.

- Si los polos están en el borde del círculo unitario (magnitud = 1), el sistema es marginalmente estable.
- Si los polos están fuera del círculo unitario (magnitud > 1), el sistema es inestable.

4.4.2 Región de Tiempo máximo de asentamiento

El tiempo máximo de asentamiento en sistemas discretos es un concepto crucial en el análisis del comportamiento de estos sistemas, ya que determina la rapidez con la que la respuesta del sistema alcanza una estabilidad dentro de un rango especificado alrededor del valor final deseado. Este rango, definido como un porcentaje del valor final (por ejemplo, el 2% o el 5%), establece los límites en los que la salida del sistema se considera suficientemente cercana al objetivo para ser aceptada como estable. En sistemas discretos, a diferencia de los sistemas continuos, este tiempo no se mide en unidades de segundos, sino en términos de muestras o iteraciones , lo que permite un análisis específico en intervalos discretos.



La estabilidad del sistema está estrechamente relacionada con la ubicación de los polos en el plano Z, que es la representación discreta equivalente al plano de s en sistemas continuos. Los polos son valores que indican la dinámica del sistema, y su posición tiene un impacto directo en la rapidez con la que la respuesta del sistema se estabiliza. Si los polos se encuentran cerca del origen en el plano Z (es decir,

valores más bajos en magnitud), la respuesta del sistema será más rápida, lo que significa que se requerirán menos muestras para que la salida entre en el rango aceptable de estabilidad. Por otro lado, si los polos están más cerca del borde del círculo unitario (que representa el límite de estabilidad en el plano Z), la respuesta del sistema será más lenta, resultando en un mayor número de muestras antes de alcanzar la estabilidad.

4.4.3 Región de Frecuencia máxima de oscilación

La frecuencia máxima de oscilación en sistemas discretos de segundo orden está relacionada con la frecuencia a la que la respuesta oscila antes de estabilizarse, medida en función de la frecuencia de muestreo del sistema. En el plano Z, la frecuencia de oscilación se determina en función del ángulo que forman los polos. con respecto al origen.

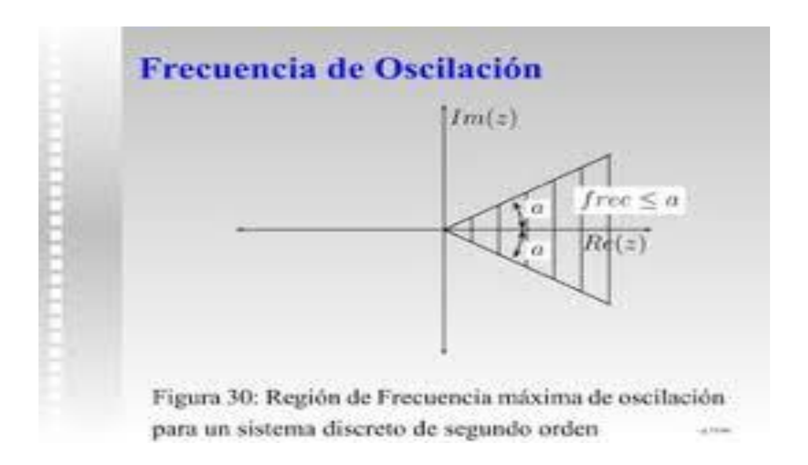


Figura 30: Región de Frecuencia máxima de oscilación para un sistema discreto de segundo orden

Para entender más a fondo la frecuencia máxima de oscilación en sistemas discretos de segundo orden, es fundamental considerar cómo esta se relaciona con la respuesta temporal y el comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia.

En los sistemas discretos, la frecuencia de oscilación máxima describe la velocidad a la que un sistema oscila antes de alcanzar su estado estable. Es decir, determina la rapidez con la que las oscilaciones de la señal de salida alcanzan la estabilidad en torno al valor final deseado. En el contexto de un sistema discreto de segundo

orden, esta frecuencia se representa en el plano Z, que es la representación frecuencial para sistemas discretos.

Relación con los polos en el plano Z

Los polos son elementos críticos en el análisis de sistemas de control, ya que definen la estabilidad y el comportamiento dinámico del sistema. En el plano Z, estos polos están representados como puntos cuyas posiciones determinan cómo oscila y decae la respuesta del sistema.

- Ángulo de los Polos: La frecuencia de oscilación se asocia directamente con el ángulo que forman los polos con el eje real en el plano Z. Cuanto mayor sea este ángulo, mayor será la frecuencia de oscilación.
- Módulo de los Polos: La magnitud o módulo de los polos influye en la atenuación de las oscilaciones. Un módulo cercano al círculo unitario indica que las oscilaciones se atenúan lentamente, lo que podría causar una mayor cantidad de oscilaciones antes de estabilizarse.

Frecuencia amortiguada (ω_d)

La frecuencia de oscilación amortiguada (ω_d) es la frecuencia con la que se produce la oscilación considerando la amortiguación propia del sistema:

$$\omega_d = \frac{\theta}{yo_s}$$

Dónde:

- ω_d: es la frecuencia amortiguada en radianes por segundo.
- Θ: es el ángulo de los polos con respecto al eje real en el plano Z.
- yos: es el período de muestreo.

Esto indica que la frecuencia de oscilación depende del ángulo de los polos y del período de muestreo. Para valores específicos, la oscilación máxima estará limitada

por la frecuencia de Nyquist, que es la mitad de la frecuencia de muestreo del sistema discreto. La frecuencia de Nyquist actúa como un límite superior que evita el fenómeno de aliasing, asegurando que las oscilaciones del sistema sean interpretadas correctamente.

Impacto de la frecuencia de oscilación en el diseño del sistema

- Frecuencia alta: Una frecuencia de oscilación alta implica que el sistema responderá rápidamente a perturbaciones, pero puede aumentar la probabilidad de inestabilidad o resonancia no deseada.
- Frecuencia baja: Una frecuencia baja puede significar una respuesta más estable y controlada, pero más lenta.

La frecuencia máxima de oscilación en sistemas discretos es esencial para determinar la rapidez con la que un sistema estabiliza su respuesta. Comprender este concepto es crucial en el diseño y análisis de sistemas digitales, especialmente en aplicaciones donde la precisión y la rapidez son factores determinantes.

Este análisis permite optimizar el comportamiento de sistemas industriales, mejorar la eficiencia en el procesamiento de señales, y garantizar que el diseño de control se mantenga estable y predecible bajo condiciones de operación variadas.

4.4.4 Región de Sobrepico máximo

El sobrepico máximo (Mp) es una de las especificaciones de la respuesta temporal de un sistema de control de segundo orden. Se define como el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido desde la unidad, y solo tiene sentido para sistemas subamortiguados.

El sobrepico máximo en un sistema de segundo orden, también conocido como overshoot, es un parámetro que indica cuán lejos puede llegar a desviarse la respuesta de un sistema en comparación con su valor final antes de estabilizarse. En sistemas discretos de segundo orden, la región de sobrepico máximo se relaciona directamente con la posición de los polos en el plano Z, que es la representación frecuencial para estos sistemas.

El sobrepico máximo se refiere a la desviación más alta que experimenta la salida del sistema respecto a su valor final deseado durante la respuesta transitoria. En términos simples, es cuánto se "excede" la respuesta del sistema antes de estabilizarse en el punto objetivo. El sobrepico es generalmente expresado como un porcentaje del valor final de la salida.

En sistemas discretos, este sobrepico está influenciado por:

- La posición de los polos en el plano Z.
  En el análisis de sistemas discretos, la posición de los polos determina la naturaleza de la respuesta transitoria:
  Polos cercanos al eje real: Típicamente resultan en un menor sobrepico, ya que la respuesta es más crítica y amortiguada.
  Polos con parte imaginaria significativa: Indican que el sistema tendrá oscilaciones, lo que puede resultar en un sobrepico más alto.
  Polos cerca del círculo unitario: Implican oscilaciones prolongadas y un sobrepico mayor.
  Polos alejados del origen: Pueden resultar en un sobrepico mayor, debido a la lenta atenuación de la señal.
- La frecuencia de muestreo del sistema.
- El coeficiente de amortiguamiento que tiene el sistema.

El sobrepico máximo (METROpagM_pMETROpag) en sistemas discretos se puede estimar utilizando la fórmula derivada del coeficiente de amortiguamiento del sistema:

$$METRO_{pag} = mi^{\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \cdot 100\%$$

En sistemas discretos, es importante considerar el **coeficiente de amortiguamiento** y la **frecuencia natural amortiguada**, ya que estos factores están influenciados por la frecuencia de muestreo y la ubicación de los polos en el

plano Z. Un menor coeficiente de amortiguamiento suele resultar en un mayor sobrepico., mientras que un coeficiente mayor reduce la cantidad de sobrepico.

Cómo controlar el sobrepico máximo

En el diseño y análisis de sistemas discretos, el sobrepico máximo es un parámetro clave a controlar porque puede indicar la capacidad del sistema para responder a cambios sin exceder el objetivo de forma excesiva. Para reducir el sobrepico en un sistema discreto de segundo orden, se pueden utilizar varias estrategias:

- **Aumentar el coeficiente de amortiguamiento:** Lo que suaviza la respuesta transitoria y disminuye el sobrepico.
- **Optimizar la frecuencia de muestreo:** Una frecuencia de muestreo más alta puede permitir un control más preciso y reducir la tendencia a tener un sobrepico elevado.
- **Modificar la ubicación de los polos:** Ajustar la posición de los polos en el plano Z hacia el interior del círculo unitario puede ayudar a reducir el sobrepico.

4.5 Efecto de los ceros.

La transformada de Laplace y la transformada Z son herramientas fundamentales en el análisis de sistemas lineales y de señales. Sin embargo, su interpretación cualitativa puede resultar compleja debido a la manera en que representan las características de un sistema en términos de sus componentes de frecuencia. Las magnitudes y fases de estas transformadas, o la representación de sus partes reales e imaginarias, se asocian a superficies complejas en un espacio tridimensional, lo cual dificulta su visualización directa y la comprensión de cómo afectan al comportamiento del sistema.

En matemáticas y en ingeniería de control y sistemas, el análisis de polos y ceros es un método clave para evaluar las propiedades de funciones racionales y para encontrar el conjunto de soluciones en desigualdades y otros problemas relacionados. Este enfoque es particularmente útil porque permite una generalización y mecanización del proceso, facilitando el análisis y diseño de sistemas complejos.

Definición y Características de Polos y Ceros

Ceros: Son los valores de la variable (por ejemplo, z o s) que hacen que el numerador de la función de transferencia se anule, es decir, aquellos puntos en los que la función de transferencia toma un valor de cero. Matemáticamente, si una función de transferencia H(z) o H(s) se define como:

$$H(z)=N(z)D(z)$$

los ceros son las raíces del polinomio N(z), donde N(z) = 0.

Polos: Son los valores de la variable para los cuales el denominador de la función de transferencia se hace cero, lo que provoca que la función se aproxime al infinito. Los polos determinan el comportamiento de la función en términos de estabilidad y

respuesta en el dominio del tiempo. Matemáticamente, estos son las raíces de D(z), donde D(z) = 0.

Análisis Gráfico

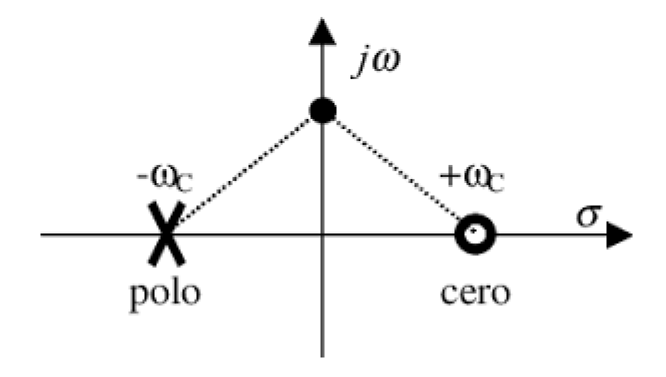
El análisis gráfico de polos y ceros, mediante diagramas en el plano complejo, proporciona una forma intuitiva de visualizar las características del sistema. En estos diagramas:

- **Los polos** se representan generalmente con una 'X'.
- **Los ceros** se representan con un 'O'.

La representación gráfica permite inferir rápidamente la estabilidad y el comportamiento de la respuesta en frecuencia de un sistema. Los diagramas de polos y ceros son también útiles para diseñar y ajustar sistemas de control, ya que permiten a los ingenieros modificar la ubicación de los polos y ceros para alcanzar las características deseadas, como mayor estabilidad, menor tiempo de asentamiento, o una menor oscilación.

Polos y Ceros en Desigualdades

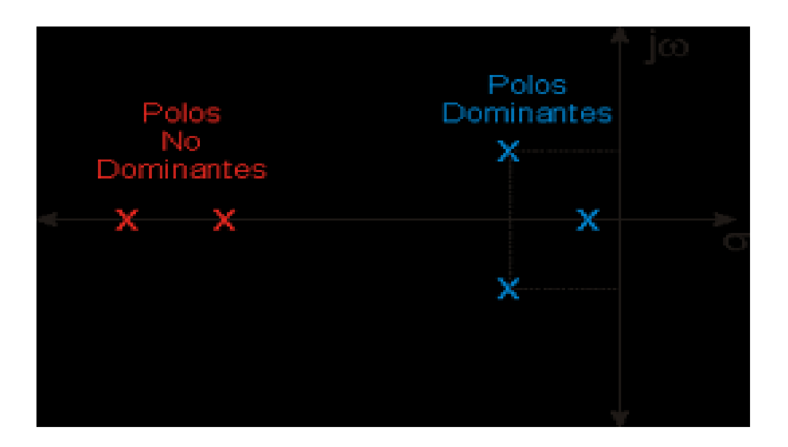
Más allá del análisis de sistemas, el método de polos y ceros es aplicable en la resolución de desigualdades. Al evaluar los polos y ceros de una función racional, es posible determinar los intervalos en los que la función es positiva o negativa. Este análisis es útil en problemas de optimización y en la resolución de ecuaciones diferenciales y diferencias.



4.6 Polos Dominantes

Los polos dominantes son un concepto clave en el análisis de sistemas de control y procesamiento de señales. Se refieren a los polos de la función de transferencia que tienen la mayor influencia en la respuesta temporal de un sistema. Estos polos dominan el comportamiento dinámico, ya que determinan cómo el sistema responde a entradas o perturbaciones, especialmente en términos de rapidez, oscilación y estabilidad.

Definición de Polos Dominantes



En un sistema con múltiples polos, aquellos que se encuentran más cerca del eje imaginario (en el caso del plano s) o más cercanos al borde del círculo unitario (en el caso del plano z) tienen un efecto más prolongado en la respuesta del sistema. En otras palabras, los polos con la parte real más cercana a cero son los que definen la tasa de decaimiento o el comportamiento oscilatorio del sistema. Estos son los llamados polos dominantes.

Importancia de los Polos Dominantes

Los polos dominantes determinan:

- Tiempo de respuesta: Cuanto más cerca esté el polo dominante del eje imaginario, más lento será el sistema en alcanzar su estado estacionario.

- Amortiguamiento: Si los polos dominantes tienen una parte imaginaria significativa, el sistema exhibirá un comportamiento oscilatorio. Cuanto mayor sea la parte imaginaria relativa a la real, mayor será la oscilación.

- Estabilidad: Los polos dominantes también son cruciales para determinar la estabilidad del sistema. Si los polos dominantes tienen una parte real positiva, el sistema es inestable.

Análisis Práctico

En el diseño y ajuste de sistemas de control, es importante identificar los polos dominantes para optimizar el rendimiento. Por ejemplo, un diseñador puede mover intencionadamente los polos dominantes al ajustar los parámetros de un controlador, como un controlador PID, para lograr un equilibrio entre la rapidez de la respuesta y el grado de oscilación.

En un sistema con polos dominantes en $-2 \pm j3$, la respuesta será oscilatoria y estará amortiguada por la parte real de -2. Al cambiar la posición de estos polos hacia la izquierda del plano complejo (parte real más negativa), el sistema se comportará de forma más rápida, pero con menos oscilación.

Los polos dominantes en sistemas continuos y discretos tienen un papel similar en determinar la dinámica y el comportamiento de un sistema, pero hay algunas diferencias importantes en cómo se representan y cómo afectan la respuesta en cada caso. Vamos a revisar ambos contextos:

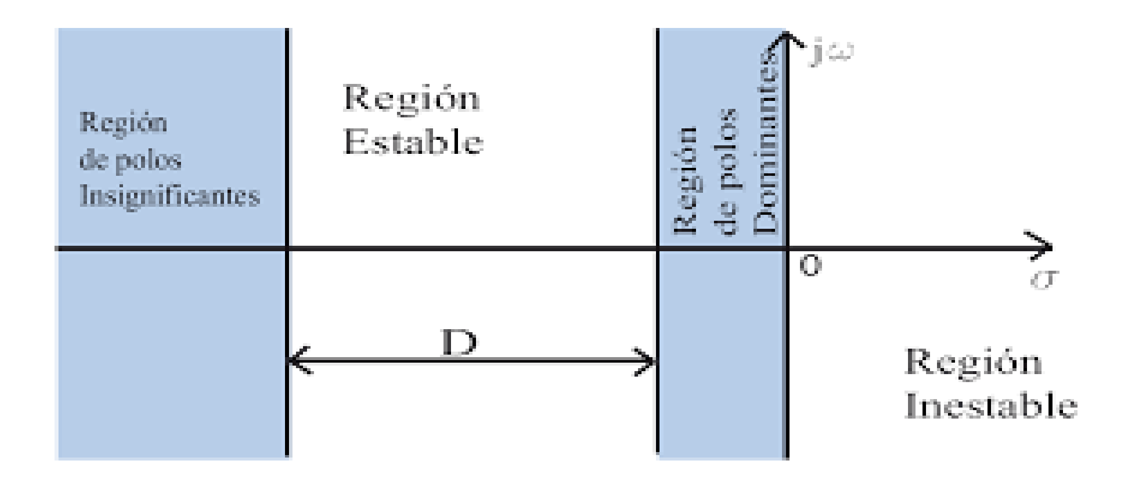
Polos Dominantes en Sistemas Continuos

En el análisis de sistemas continuos, los polos se ubican en el plano ss (plano complejo) que se utiliza en la transformada de Laplace.

- Ubicación de los Polos: Los polos se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo para que el sistema sea estable. Si los polos están en el semiplano derecho, el sistema es inestable y la respuesta crece exponencialmente con el tiempo.

- Influencia en la Respuesta: Los polos con la parte real más cercana al eje imaginario tienen un efecto dominante en la respuesta transitoria. Estos polos son los que determinan cómo el sistema responde a cambios en la entrada, afectando aspectos como el tiempo de asentamiento y el comportamiento oscilatorio.

- Respuesta Amortiguada y Oscilatoria: Los polos complejos conjugados con una parte real negativa producen una respuesta oscilatoria amortiguada. Cuanto mayor sea la parte real negativa, más rápida será la amortiguación y más corta la duración de la oscilación.



Polos Dominantes en Sistemas Discretos

En sistemas discretos, los polos se representan en el plano z, que se utiliza en la transformada Z.

- Ubicación de los Polos: Para que un sistema discreto sea estable, los polos deben estar dentro del círculo unitario (con radio 1) en el plano z. Si algún polo se encuentra en el exterior del círculo unitario, el sistema es inestable.

- Influencia en la Respuesta: En sistemas discretos, los polos más cercanos al borde del círculo unitario son los que dominan la respuesta del sistema. Estos polos determinan cómo evoluciona la salida en función de los pasos de tiempo.

- Respuesta Oscilatoria en Sistemas Discretos: Los polos complejos conjugados que están dentro del círculo unitario, pero cerca de su borde causan una respuesta oscilatoria en el dominio discreto. Cuanto más cerca estén los polos del borde, más prolongada y menos amortiguada será la oscilación.

Comparación entre Continuo y Discreto

- Estabilidad: En sistemas continuos, los polos deben estar en el semiplano izquierdo para ser estables, mientras que en sistemas discretos deben estar dentro del círculo unitario.
- Tiempo de Respuesta: En sistemas continuos, el tiempo de respuesta depende de la parte real de los polos; en sistemas discretos, depende de la distancia de los polos al origen (cuanto más cerca del borde del círculo unitario, más lenta es la respuesta).
- Análisis Gráfico: En el caso continuo, se observa la distribución de los polos en el plano s. En el caso discreto, la distribución se visualiza en el plano z con el círculo unitario como referencia de estabilidad.

4.7 Técnicas del Lugar de las Raíces

El Lugar de las Raíces es una técnica gráfica fundamental en el análisis y diseño de sistemas de control lineales. Esta metodología permite visualizar cómo variar las posiciones de los polos de un sistema en lazo cerrado al modificar un parámetro específico, generalmente la ganancia del sistema. A través de esta representación, es posible evaluar la estabilidad y el comportamiento dinámico del sistema sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación característica para cada valor del parámetro.



Fundamentos del Lugar de las Raíces

La técnica se basa en la ecuación característica del sistema en lazo cerrado, que se expresa como:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Dónde G(s) es la función de transferencia de la planta y H(s) es la función de transferencia del elemento de realimentación. Al variar un parámetro, como la ganancia K, las raíces de esta ecuación (los polos del sistema en lazo cerrado) describen trayectorias en el plano complejo. El Lugar de las Raíces traza estas trayectorias, proporcionando información valiosa sobre la estabilidad y la respuesta temporal del sistema.

Técnica del Lugar de las Raíces

El procedimiento para dibujar el Lugar de las Raíces involucra varias reglas, que permiten predecir cómo se mueven los polos del sistema cuando la ganancia K cambia:

1. **Número de ramas:** El número de ramas del Lugar de las Raíces es igual al número de polos del sistema.
2. **Inicio y fin de las ramas:** Las ramas del lugar de las raíces es igual al número de los polos del sistema (cuando $K = 0$) y termina en los ceros del sistema (cuando $K \to \infty$).
3. **Asíntotas:** Si el número de polos es mayor que el número de ceros, algunas ramas se dirigen al infinito siguiendo líneas llamadas asíntotas están determinadas por la formula:

   A = ángulo de asíntota = 18 ɵ (2k +1) / PAG – ɵ

   Donde PAG es el numero de polos y ɵ es el número de ceros.

4. **Eje real:** El Lugar de las Raíces solo puede estar en el eje real en los segmentos que se encuentren a la izquierda de un número impar de polos y ceros.
5. **Puntos de ruptura:** Son puntos en el eje real donde las ramas del Lugar de las Raíces se separan o se juntan. Se pueden calcular derivando la función característica.
6. **Ángulos de partida y llegada:** Si existen polos o ceros complejos conjugados, las ramas parten o llegan a estos con un ángulo determinado.

Interpretación del lugar de las raíces

El lugar de las raíces permite evaluar la estabilidad del sistema:

- Si todos los polos se encuentran en el semiplano derecho ($Re(s) < 0$), el sistema es estable.
- Si alguno de los polos se encuentra en el semi plano derecho ($Re(s) > 0$), el sistema es inestable.

- Polos en el eje imaginario indican un sistema marginalmente estable (oscila continuamente sin amortiguarse).

Procedimiento para Construir el Lugar de las Raíces

Para construir el Lugar de las Raíces, se siguen generalmente los siguientes pasos:

1. Identificación de Polos y Ceros de Lazo Abierto: Determinar las ubicaciones de los polos y ceros de la función de transferencia en lazo abierto G(s)H(s).
2. Determinación de las Ramas: El número de ramas del Lugar de las Raíces corresponde al número de polos de lazo abierto. Cada rama inicia en un polo y, dependiendo de la configuración, puede terminar en un cero de lazo abierto o en el infinito.
3. Identificación de las Asíntotas: Cuando el número de polos excede al de ceros, algunas ramas tenderán hacia el infinito siguiendo asíntotas específicas. Las asíntotas se calculan utilizando las fórmulas:
    a. Ángulo de las Asíntotas: $\theta = \frac{(2k+1)180°}{n-m}$
    b. Dónde $\mathrm{a} = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n} - \mathrm{m} - 1$, n es el número de polos y m el número de ceros.
4. Determinación de los Puntos de Ruptura y Unión: Estos puntos son donde las ramas del Lugar de las Raíces se dividen o convergen en el eje real. Se determina resolviendo la derivada de la función característica respecto as.
5. Análisis de Cruce por el Eje Imaginario: Para evaluar la estabilidad, es crucial determinar si alguna rama cruza el eje imaginario. Esto se realiza aplicando el criterio de Routh-Hurwitz o resolviendo la ecuación característica para valores de $s = \mathrm{j}\omega$.

Análisis del Lugar de las Raíces para Sistemas de Primer Orden

En un sistema de primer orden, solo hay un polo, que se encuentra en:

$$S = -1/m$$

El análisis del Lugar de las Raíces en este caso es simple, ya que hay solo un polo y este se mueve en función de la ganancia *K.*

Cuando *K* aumenta:

- El polo se mueve a lo largo del eje real en el plano *s*
- No hay oscilaciones porque el sistema no tiene polos complejos conjugados.

Análisis del Lugar de las Raíces para Sistemas de Segundo Orden

En un sistema de segundo orden, hay dos polos cuya ubicación cambia cuando se varía la ganancia *K. Dependiendo del valor del factor de amortiguamiento ζ, se pueden distinguir diferentes comportamientos:*

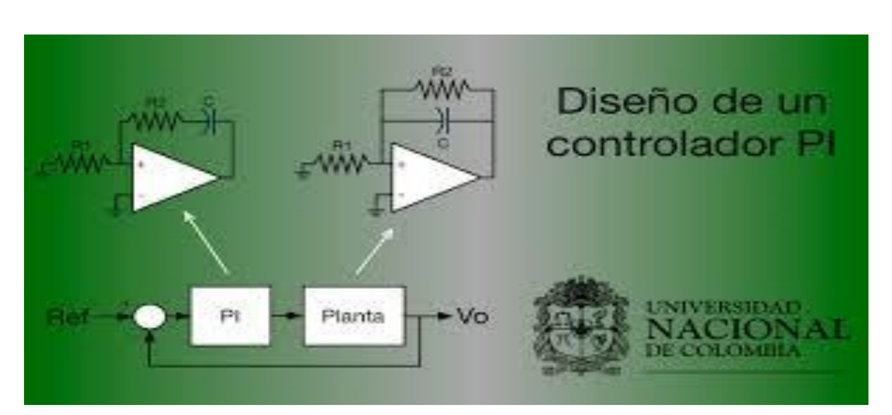
1. Submortiguado ($0 < \zeta < 1$): Los polos son complejos conjugados. A medida que *K* aumenta, los polos se mueven en el plano complejo, lo que puede generar oscilaciones.
2. Sobreamortiguado ($\zeta > 1$): Los polos son reales y distintos. A medida que *K* aumenta, los polos se mueven en el eje real, sin generar oscilaciones.
3. Amortiguación crítica ($\zeta = 1$): Los polos son reales e iguales. Al aumentar *K* mueve los polos a lo largo del eje real.

Aplicaciones del Lugar de las Raíces

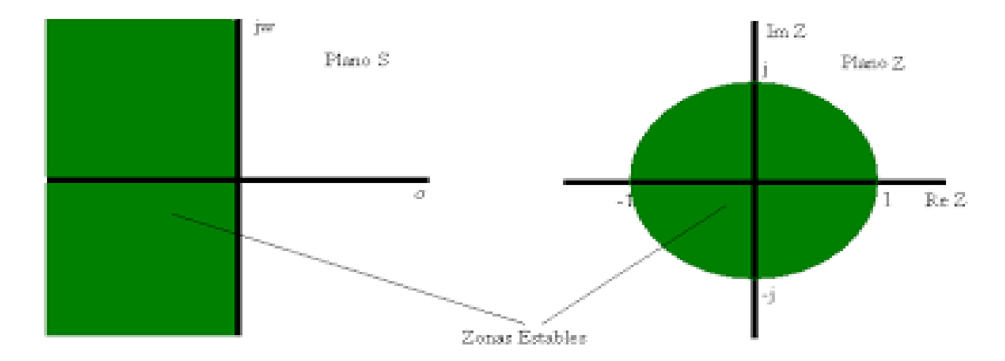
El Lugar de las Raíces es una herramienta versátil en el diseño y análisis de sistemas de control, permitiendo:

- Evaluar la Estabilidad: Al observar las trayectorias de los polos, se puede determinar si el sistema permanece estable para diferentes valores de la ganancia.
- Diseñar Controladores: Facilita la selección de parámetros de control que posicionan los polos en ubicaciones deseadas, optimizando la respuesta del sistema.

- Analizar la Sensibilidad: Permite estudiar cómo variaciones en los parámetros afectan la ubicación de los polos y, por ende, el comportamiento dinámico del sistema.



4.8 Mapeo del plano s al z y viceversa



El mapeo entre el plano s y el plano z es fundamental en el análisis y diseño de sistemas de control, especialmente al transitar de sistemas de tiempo continuo a sistemas de tiempo discreto. Este proceso permite comprender cómo las características de un sistema en el dominio continuo se reflejan en su contraparte discreta, facilitando el diseño y análisis de controladores digitales.

Relación entre los planos s y z

La transformación que conecta ambos planos se define por la expresión:

$$z = e^{8T}$$

Donde T representa el período de muestreo. Esta relación implica que cada punto en el plano s se corresponde con un punto en el plano z, y viceversa. Específicamente:

El semiplano izquierdo del plano s (donde la parte real de s es negativa) se mapea dentro del círculo unitario en el plano z (es decir, $|z| < 1$).

El eje imaginario en el plano s (donde la parte real de s es cero) se corresponde con el círculo unitario en el plano z (es decir, $|z| = 1$).

El semiplano derecho del plano s (donde la parte real de s es positiva) se mapea fuera del círculo unitario en el plano z (es decir, $|z| > 1$).

Esta correspondencia es crucial para analizar la estabilidad de sistemas discretos, ya que un sistema es estable si todos sus polos están dentro del círculo unitario en el plano z.

Mapeo de características específicas

Algunas características del plano s y su correspondencia en el plano z incluyen:

Líneas de atenuación constante: En el plano s, estas líneas son verticales y se corresponden con círculos de radio $e^{\sigma T}$ en el plano z, donde σ es la constante de atenuación.

Líneas de frecuencia constante: En el plano s, estas líneas son horizontales y se mapean como líneas radiales en el plano z con un ángulo ωT, donde ω es la frecuencia.

Líneas de factor de amortiguamiento constante: En el plano s, estas líneas son radiales y se corresponden con espirales logarítmicas en el plano z.

Importancia en el diseño de controladores

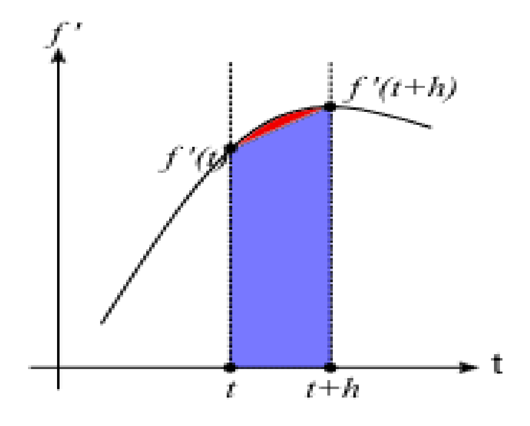
Comprender el mapeo entre los planos s (dominio continuo) y el plano z (dominio discreto) es fundamental en el diseño de controladores digitales, especialmente en una era donde la implementación digital de sistemas de control es cada vez más prevalente. Esta comprensión proporciona una base sólida para diseñar controladores que puedan trasladarse sin problemas del mundo analógico a digital, asegurando que las características de rendimiento y estabilidad se mantengan intactas después de la digitalización. El mapa entre los planos s y el plano z una pieza esencial en el diseño de controladores digitales. Esta comprensión permite a los ingenieros anticipar el comportamiento del sistema después de la digitalización, asegurando que se mantienen las especificaciones de rendimiento, estabilidad y precisión. Además, facilita la implementación de controladores en aplicaciones de tiempo real, optimiza el uso de recursos en sistemas embebidos, y permite una adaptación eficiente a tecnologías emergentes, lo que hace que este conocimiento sea invaluable en el diseño moderno de sistemas de control digital.

Aplicaciones del mapeo del plano s al plano z

El **mapa del plano s al plano z y viceversa** tiene diversas aplicaciones en la ingeniería y el análisis de sistemas, especialmente en los campos de **control automático, procesamiento de señales, y diseño de filtros digitales**.

El mapa entre los planos s y el plano z es una herramienta esencial en ingeniería, ya que permite el diseño, análisis y simulación de sistemas digitales a partir de sus versiones continuas. Además, facilitar la implementación de controladores y filtros digitales, el análisis de estabilidad y la optimización de sistemas en tiempo real. La técnica elegida (transformación bilineal, ZOH, Euler, etc.) dependerá de las características y los requisitos específicos de la aplicación.

4.9 Transformada Bilineal



La Transformada Bilineal, también conocida como Método de Tustin, es una técnica fundamental en el procesamiento digital de señales y en la teoría de control de sistemas discretos. La **Transformada Bilineal** es una técnica matemática utilizada en el análisis y diseño de sistemas de control digital y en la conversión de filtros analógicos a filtros digitales. Esta transformación permite pasar del **dominio continuo** (representado por la variable compleja s en el plano s) al **dominio discreto** (representado por la variable z en el plano z) de forma que se preserven características importantes del sistema, como la estabilidad.

Fundamentos de la Transformada Bilineal

La transformada bilineal se basa en la sustitución de la variable s del dominio continuo por una función de la variable z del dominio discreto, según la siguiente relación:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Donde T representa el período de muestreo. Esta transformación mapea el eje $j\omega$ del plano s al círculo unitario en el plano z, asegurando que los polos en el semiplano izquierdo de s se correspondan con polos dentro del círculo unitario en z, manteniendo así la estabilidad del sistema.

Propiedades clave de la Transformada bilineal

- **Estabilidad preservada:** Los polos en el semiplano izquierdo del plano s se mapean dentro del círculo unitario en el plano z. Esto significa que, si un sistema es estable en el dominio continuo, seguirá siendo estable después de la transformación al dominio discreto.
- **Mapeo no lineal de la frecuencia**: La relación entre las frecuencias en s y z no es lineal. Esto significa que las frecuencias altas se comprimen en el proceso de transformación.
- **Prewarping de frecuencia**: Debido a la distorsión no lineal de la frecuencia, se puede aplicar un ajuste previo (prewarping) para asegurar que ciertas frecuencias se mapeen con precisión.

Desventajas de la transformada bilineal

- **Distorsión de frecuencia en altas frecuencias:** La Transformada Bilineal introduce una distorsión en frecuencias altas, conocida como compresión de frecuencia. Esto significa que las frecuencias altas no se mapean linealmente, lo que puede afectar la precisión de un filtro en ese rango.

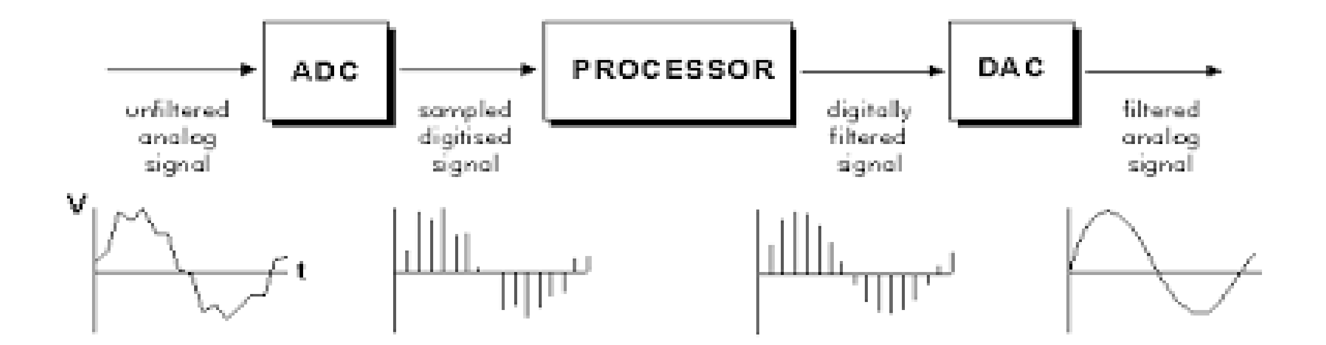
- **Prewarping necesario:** Para corregir la distorsión en frecuencias críticas, se debe aplicar prewarping antes de la transformación, lo que añade un paso adicional al diseño. La Transformada Bilineal introduce una distorsión no lineal de la frecuencia debido al mapeo no lineal de las frecuencias entre los dominios s y z. Esto significa que las frecuencias altas en el dominio continuo se comprimen al transformarse al dominio discreto

Ventajas de la transformada bilineal

Una de las principales ventajas de la Transformada Bilineal es la ausencia de aliasing en la respuesta en frecuencia. El aliasing es un fenómeno en el que las altas frecuencias del dominio continuo se "doblan" o se confunden con las bajas frecuencias en el dominio discreto, lo que puede degradar la calidad de la señal digital. La Transformada Bilineal evita este problema porque, a diferencia de métodos como la invarianza al impulso, no discretiza directamente el sistema, sino que mapea todo el eje jω del plano s al círculo unitario en z, preservando mejor la estructura del sistema.

La Transformada Bilineal es relativamente sencilla de implementar. La fórmula matemática básica para la transformación entre s y z es directa y no requiere cálculos complejos, lo que la hace conveniente para aplicaciones prácticas en diseño y simulación. Además, se encuentra integrada en muchas herramientas de software de simulación, facilitando su uso en proyectos de ingeniería.

Otra ventaja significativa es la capacidad de **preservar la estabilidad** del sistema durante la transformación del dominio continuo al discreto. Un sistema estable en el dominio continuo (es decir, con polos en el semiplano izquierdo del plano s) seguirá siendo estable en el dominio discreto (con polos dentro del círculo unitario en z) después de aplicar la Transformada Bilineal. Esto es especialmente importante en sistemas de control, donde la estabilidad es crítica para garantizar que la respuesta del sistema sea predecible y segura.



La Transformada Bilineal es una técnica robusta y eficaz en el diseño y análisis de sistemas discretos. Sus aplicaciones abarcan desde el diseño de filtros digitales hasta la implementación de controladores de precisión en sistemas de tiempo real. Aunque introduce un fenómeno de deformación de frecuencia, sus ventajas, como la preservación de la estabilidad y la ausencia de aliasing, la convierten en una opción preferida en muchas aplicaciones de la ingeniería moderna.

BIBLIOGRAFÍAS

[1] C, S. (2019). ▷ Sistemas de Primer Orden - [noviembre, 2022]. Control Automático Educación. https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/sistemas-dinamicos-de-primer-orden/

[2] Sistemas de primer orden ::. (n.d.). Suayed.cuautitlan.unam.mx. https://suayed.cuautitlan.unam.mx/uapas/07_SistPrimer_Orden/

[3] TEMA 4 Sistemas primer orden - TEMA 4.- ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS LI- NEALES E - Studocu. (2019). Studocu. https://www.studocu.com/es/document/universidad-de-malaga/automatica/tema-4-sistemas-primer-orden/9887939

[4] BERRÍOS, J. C. (2021). ▷ Sistema de control de primer orden: ¿Qué es? (Tiempo de subida, tiempo de asentamiento y función de transferencia) | TELCOM® 2023. TELCOM: Aprenda Ingeniería Eléctrica Y Electrónica (Gratis). https://telcomplus.org/sistema-de-control-de-primer-orden/

[5] SISTEMAS DISCRETOS. (n.d.). http://www2.elo.utfsm.cl/~elo104/informacion/resumenes/9_Transformada%20Zeta.pdf

[6] Facultad de Ingenieria. (2017). Sistemas y Señales. Unam.mx. https://control.fi-b.unam.mx/papime_sys/index.php

[7] Lango, H. (n.d.). Introducción a los Sistemas Dinámicos Discretos (versión preliminar). Recuperado el 10 de octubre, 2024, de https://www.dynamics.unam.edu/NotasVarias/intro-sistemas.pdf

[8] Sistemas de Segundo Orden - [TODOS los Casos, 2021]. (2019). Control Automático Educación. https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/sistemas-de-segundo-orden/

[9] Sistemas de segundo orden – Ingeniería Mecánica Eléctrica. (2018). Unam.mx. https://virtual.cuautitlan.unam.mx/intar/ime/sistemas-de-segundo-orden/

[10] Sistemas de Segundo Orden. (2022, October 30). LibreTexts Español. https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Introducción_a_los_Sistemas_Dinámicos_Lineales_Invariantes_en_el_Tiempo_para_Estudiantes_de_Ingeniería_(Hallauer)/10%3A_Sistemas_de_Segundo_Orden

[11] Studocu. (n.d.). Sistemas de primer y segundo orden - Sistemas de Primer y Segundo Orden. Recuperado de https://www.studocu.com

[12] OCW. (n.d.). Régimen transitorio. Recuperado de https://ocw.ehu.eus

[13] 1Library. (n.d.). Apuntes Dinámica de Sistemas. Recuperado de https://1library.co

[14] Instituto Tecnológico de Iztapalapa. (n.d.). Sistema de Asignación y Transferencia de Créditos Académicos. Recuperado de https://www.iti.edu.mx

[15] Universidad de Alicante. (n.d.). Identificación experimental de sistemas. Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/18965/1/Identificacion%20experimental%20de%20sistemas.pdf

[16] Universidad Nacional de San Luis. (n.d.). Práctico 3 Parte 1 Respuesta Temporal de Sistemas de 1er y 2do Orden. Recuperado de https://www.unsl.edu.ar

[17] Universidad Nacional de San Luis. (n.d.). Práctico 3 Parte 1 Respuesta Temporal de Sistemas de 1er y 2do Orden. Recuperado de https://www.unsl.edu.ar

[18] Universidad Nacional de Tucumán. (2016). Análisis de Respuestas Transitorias Sistemas de 2do Orden. Recuperado de https://catedras.facet.unt.edu.ar/sistemasdecontrol/wp-content/uploads/sites/101/2016/04/4_An%C3%A1lisis-de-Respuestas-Transitorias_Sistemas-de-2do-Orden_2016-1.pdf

[19] Carakenio. (2024, 17 septiembre). *Sistemas de segundo orden – Sistemas de control*. Dademuchconnection.

https://dademuchconnection.wordpress.com/2020/05/07/sistema-de-segundo-orden/

[20] Transparencias dinamica orden. (s/f). SlideShare. Recuperado el 17 de noviembre de 2024, de https://es.slideshare.net/miguelprada91/transparencias-dinamica-orden

[21] Sistemas de segundo orden – Sistemas de control. (2020, mayo 7). dademuchconnection.
https://dademuchconnection.wordpress.com/2020/05/07/sistema-de-segundo-orden/

[22] (S/f-c). Edu.ec. Recuperado el 17 de noviembre de 2024, de https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/11739/4/T1496.pdf

[23] N°, P. (s/f). *LABORATORIO DE SISTEMAS DE CONTROL DISCRETO*. Edu.ec. Recuperado el 17 de noviembre de 2024, de https://cea.epn.edu.ec/images/HOJAS_GUIAS_22B/CONTROL_DISCRETO/P5_C discreto.pdf

[24] Hernández Gaviño, R. (2011). Introducción a los sistemas de control. México DF: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

[25] Ogata, K., Dormido Canto, S., Dormido Canto, R. y Dormido Bencomo, S. (2010).
Ingeniería de control moderna. 5th ed. Madrid: Prentice Hall.

[26] Kuo, B. and Aranda Pérez, J. (1996). Sistemas de control automático. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

[27] Richard C. Dorf y Robert H. SISTEMAS DE CONTROLMODERNO. Bishop, Pearson
Edcacion, Madrid, Ed., 2005

[28] Cartagena99. (Dakota del Norte). Capítulo 10: Técnicas del lugar de raíces (LDR). Recuperado de https://www.cartagena99.com/recursos/alumnos/apuntes/TEMA%2010%20%20Tecnicas%20del%20lugar%20de%20Raices%20%28LDR%29.pdf

[29] Universidad de Cantabria. (Dakota del Norte). Automática. Capítulo 6. Lugar de las raíces. Recuperado de https://ocw.unican.es/pluginfile.php/1829/course/section/1438/capitulo_6.pdf

[30] Universidad Nacional de San Luis. (Dakota del Norte). Técnica del Lugar de las Raíces. Recuperado de https://www0.unsl.edu.ar/~control1/apuntes/C4.1.pdf

[31] Herramientas de cálculo. (2018). Mapeo entre el plano s y el plano z. Control digital. Recuperado de https://herramientasdecalculo.com/2018/04/04/2-5-mapeo-entre-el-plano-s-y-el-plano-z-control-digital/

[32] Infante-Jacobo, M. (2017). Mapeo entre planos complejos S y Z. Recuperado de https://pdfcoffee.com/mapeo-entre-planos-complejos-s-y-z-3-pdf-free.html

[33] Dinámica de Sistemas 4. (2022). Mapeo del plano s al z y viceversa. Recuperado de https://dinamicadesistemas4.blogspot.com/2022/05/mapeo-del-plano-s-al-z-y-viceversa.html

[34] LibreTexts Español. (n.d.). Polos y ceros en el Plano Z. Recuperado de https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Se%C3%B1ales_y_Sistemas_%28Baraniuk_et_al.%29/12%3A_Transformaci%C3%B3n_Z_y_Dise%C3%B1o_de_Sistema_de_Tiempo_Discreto/12.05%3A_Polos_y_ceros_en_el_Plano_Z

[35] Salazar, G. H. (2021). Transformación bilineal o transformación de Tustin. Recuperado de https://ghsalazar.github.io/2021/03/07/transformaci%C3%B3n-bilineal.html

[36] Wikipedia. (s.f.). Transformación bilineal. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Transformaci%C3%B3n_bilineal

[37] AcademiaLab. (s.f.). Transformada bilineal. Recuperado de https://academia-lab.com/enciclopedia/transformada-bilineal/

[38] LibreTexts Español. (s.f.). Transformación Bilineal. Recuperado de https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Introducci%C3%B3n_a_la_electr%C3%B3nica_f%C3%ADsica_(Wilson)/06%3A_Transmisi%C3%B3n_de_estado_estacionario_de_CA/6.07%3A_Transformaci%C3%B3n_Bilineal

[39] *§ Transformaciones entre los planos z y s*. (2010, 4 junio). Transformadas de Laplace. https://0ptimo.wordpress.com/paginas/transformadas-de-laplace/capitulo-i/transformaciones-entre-los-planos-z-y-s/

[40] colaboradores de Wikipedia. (2024, 7 julio). Transformación bilineal. Wikipedia, la Enciclopedia Libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Transformaci%C3%B3n_bilineal

[41] Salazar-Silva, G. H. (2021, 7 marzo). Transformación bilineal o transformación de Tustin. La libreta de Gastón. https://ghsalazar.github.io/2021/03/07/transformaci%C3%B3n-bilineal.html